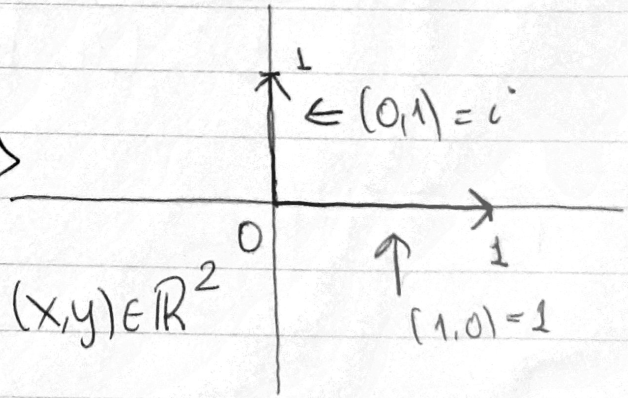
Μάθημα 2ο 23/02/2018

Η επίλυση της $\boxed{x^2=-1}$ οδηγεί στην εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών. Δηλαδή ενός σώματος $(\mathbb{C},+,\cdot)$ το οποίο αποτελεί ελάχιστη επέκταση του σώματος $(\mathbb{R},+,\cdot)$ και περιέχει έναν αριθμό $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ με $i^2=-1$ (και $i=\sqrt{-1}$)

$\xRightarrow[\text{ΒΡΑ}]{\text{ΑΛΓΕ}}$ Το $\mathbb{C}$ ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$ (διαν. χ. πάνω από το $\mathbb{R}$ διάστασης $=2$) και το $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ ΤΑΥΤΙΖΕΤΑΙ με το $+:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$

Ερμηνεία: Η επέκταση του $(\mathbb{R},+,\cdot)$ έτσι ώστε να περιέχει το $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ οδηγεί (Άλγεβρα) στο ότι το νέο σώμα $(\mathbb{C},+,\cdot)$ θα είναι δ.χ. με διανύσματα βάσης τα $1\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ και $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ τα οποία ταυτίζονται ως: $\mathbb{C}\ni 1=(1,0)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}\ni i=(0,1)\in\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ $z\in\mathbb{C}$
$\iff z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$ $\iff$



$$\iff z=x\cdot 1+yi=x(1,0)+y(0,1)=(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$

Πρόσθεση στο $\mathbb{C}$ $\quad z_1 = x_1 + y_1 i = (x_1, y_1)$, $z_2 = x_2 + y_2 i = (x_2, y_2)$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

Πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{C}$ $\quad z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) =$

$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i =$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Θεώρημα: Το σύνολο των μιγαδικών $\mathbb{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$ (και $i^2 = -1$) είναι επέκταση το $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

SOS

Παρατήρηση: Στην πράξη αυτό σημαίνει ότι «ΚΑΝΟΥΜΕ» πράξεις με μιγαδικούς όπως ακριβώς με πραγματικούς λαμβάνοντας όμως υπόψιν ότι $i^2 = -1$

Παραδείγματα! 1) $\underbrace{(2+3i)}_{z_1} + \underbrace{(7+6i)}_{z_2} = 9 + 9i = 9(1+i)$

2) $\underbrace{(2+3i)}_{z_1}\underbrace{(7+6i)}_{z_2} = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 6i + 3i \cdot 7 + 3i \cdot 6i = 14 - 18 + 12i + 21i =$
$= -4 + 33i$

3) $(2+3i) - (7+6i) = -5 - 3i$

4) $\frac{1}{2+3i}$ Αυτό γίνεται: $2+3i = (2,3) \neq (0,0) = 0 + 0i = 0$

Άρα: $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13} =$

$$= \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

5) $\frac{7+6i}{2+3i} = 7+6i \cdot \frac{1}{2+3i} = (7+6i) \cdot \frac{2-3i}{13} = \frac{14+18+((-21)+12)i}{13} =$

$= \frac{32-9i}{13}$

6) $(-1+3i)^{-1} = \frac{1}{-1+3i} = \frac{-1-3i}{10}$

7) $(1+i)\,i(2-i) = (i-1)(2-i) = 2i-2+i-i^2 = 3i-2+1 =$
$= 3i-1 = -1+3i$

8) $\frac{1+i}{i} =$

9) $\frac{i}{1+i} =$

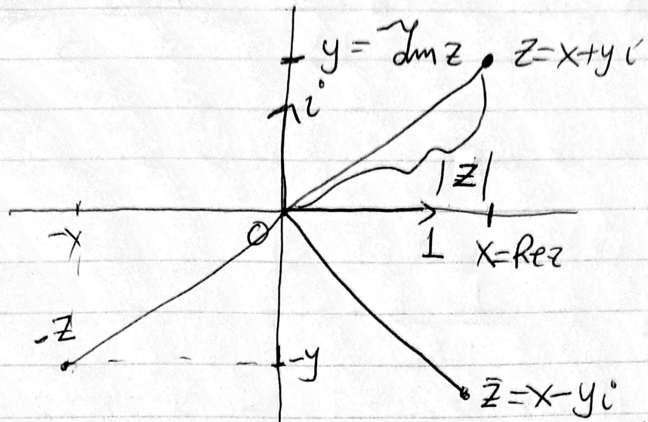
<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> ΟΤΑΝ ΒΛΕΠΟΥΜΕ $z=x+yi$ ΘΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΡΟΣΕΧΩ <u>ΑΝ $x,y \in \mathbb{R}$</u> ΓΙΑ ΝΑ ΠΟΥΜΕ ΟΤΙ ΕΙΝΑΙ Ο z ΔΟΣΜΕΝΟΣ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

[Δίνεται: $z = u+vi$ με $u=2+3i$ και $v=1+i$]

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω $z = x+yi \in \mathbb{C}$ με $x,y \in \mathbb{R}$. Τότε οι αριθμοί $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$, $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$
$\hookrightarrow = \|(x,y)\|$

$\bar{z} := x-yi \in \mathbb{C}$ ονομάζονται αντίστοιχα:
πραγματικό μέρος, φανταστικό μέρος, απόλυτη τιμή (ή μέτρο) και συζυγής (μιγ. αρ. του z)



Συνέπειες: $z = Re z + i\, Im z$, $|z| = \sqrt{(Re z)^2 + (Im z)^2}$

$\bar{z} = Re z - i\, Im z = Re \bar{z} + i\, Im \bar{z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} Re z = Re \bar{z} \\ Im z = - Im \bar{z} \end{array}}$$

SOS

Πρόταση: Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε ισχύουν οι ισότητες

$Re z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $Im z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, $\boxed{z \bar{z} = |z|^2}$,

$|-z| = |z| = |\bar{z}|$, $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\boxed{\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$Re z \leq |Re z| \leq |z|$, $Im z \leq |Im z| \leq |z|$

$$\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιούμε τις αλγεβρικές παραστάσεις: $z = x+yi$, $z_j = x_j + y_j i$, $j=1,2$.

$$x \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2}, \quad y \le |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}z = x = \frac{x+yi+x-yi}{2} = x$$

$$z-\bar{z} = x+yi-x+yi = 2yi \Leftrightarrow \frac{z-\bar{z}}{2i} = y = \mathrm{Im}z$$

$$|-z| = |-x-yi| = \sqrt{(-x)^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

$$|\bar{z}| = |x-yi| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

$$\bar{\bar{z}} = \overline{(x-yi)} = x-(-y)i = x+yi = z$$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)} = \overline{x_1+x_2+(y_1+y_2)i} =$$

$$= x_1+x_2-(y_1+y_2)i = (x_1-y_1 i)+(x_2-y_2 i) = \bar{z}_1+\bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i)}$$

$$\Rightarrow z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2-\cancel{xyi}+\cancel{xyi}-y^2i^2 = x^2+y^2 = |z|^2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Έστω $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\underbrace{\overline{z_1 z_2}}_{=\bar{z}_1\bar{z}_2} = z_1\bar{z}_1\, z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2|z_2|^2$$

ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\underbrace{(\overline{z_1+z_2})}_{=\bar{z}_1+\bar{z}_2} = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |\bar{z}_2|^2$

Ασκήσεις ① $az+b=0$, $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $b\in\mathbb{C}$

Βρείτε το z:

ΛΥΣΗ

$$az=-b \Leftrightarrow \frac{1}{a}(az)=\frac{1}{a}(-b) \Leftrightarrow \boxed{z=-\frac{b}{a}}$$

② Έστω $w=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ (Έστω $w\in\mathbb{C}$)

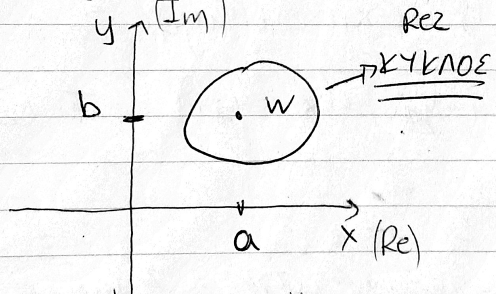
Γράψτε το σύνολο $K=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-w|=d,\ d>0\}$ ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και σχεδιάστε το στο μιγαδικό επίπεδο

ΛΥΣΗ

Έστω στη αλγεβρική μορφή $w=a+bi$, $z=x+yi$

$\Rightarrow |z-w|=|x+yi-a-bi|=|(x-a)+(y-b)i|=$

$=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=m \Leftrightarrow (\underset{\mathrm{Re}z}{x-a})^2+(\underset{\mathrm{Im}z}{y-b})^2=m^2$



$|z-w|=\|(x-a,y-b)\|=m$

$K=$ κύκλος κέντρου w ακτίνας m

③ Αν $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δ.ο. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

ΛΥΣΗ

$w\neq 0 \Leftrightarrow |w|=\sqrt{a^2+b^2}>0$

$a+bi \quad =0+0i \qquad =|\bar{w}|$

$=(a,b) \quad =(0,0) \qquad \bar{w}\neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z\frac{1}{w}} = \bar{z}\,\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z}\,\overline{\left(\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right)} = \bar{z}\cdot\overline{\bar{w}\frac{1}{|w|^2}} =$$

$$= \bar{z}\,\overline{\bar{w}}\,\overline{\left(\frac{1}{|w|^2}\right)} = \bar{z}\cdot w\frac{1}{|w|^2} = \bar{z}\,\frac{w}{|w|^2}$$

<u>Παρατήρηση</u> (α) Για την πραγματική μονάδα έχουμε

$1 = 1+0i \Rightarrow \mathrm{Re}\,1 = 1,\ \mathrm{Im}\,1 = 0$

$|1| = 1 = \sqrt{1^2+0^2} = 1 = \frac{1}{1} = \bar{1}$

Για τη φανταστική μονάδα $i = 0+1i$

$\mathrm{Re}\,i = 0,\ \mathrm{Im}\,i = 1,\quad |i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$\bar{i} = 0-1i = -i,\quad \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

$\bar{i} = -i = \frac{1}{i}$

(β) Κάθε πραγματικός αριθμός το $x = x+0i$ έχει

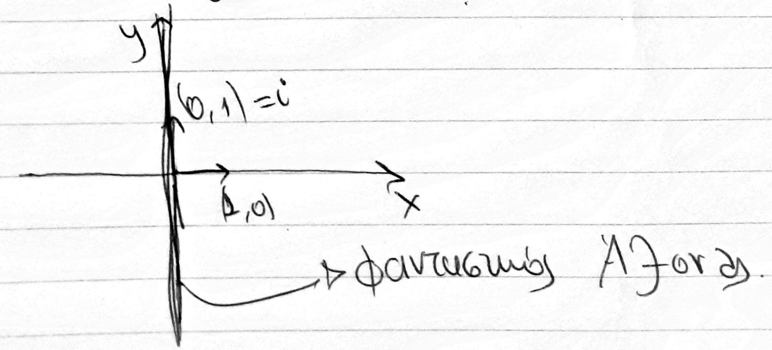
$\mathrm{Re}\,x = x,\ \mathrm{Im}\,x = 0,\ \underbrace{|x|}_{=\sqrt{x^2+0^2}} = \underbrace{|x|}_{\text{απολ. τιμή στο } \mathbb{R}}$

$\bar{x} = x-0i = x$

(γ) Κάθε αριθμός της μορφή $\boxed{yi,\ y\in\mathbb{R}}$ ονομάζεται φανταστικός αριθμός

$yi = 0+yi,\ \mathrm{Re}\,yi = 0,\ \mathrm{Im}\,yi = y$

$|yi| = |y|,\ \overline{yi} = -yi$



Ασκήσεις για το σπίτι: Βλέπε Lang

Complex Analysis (4^{th} edition)

2) $|z-i+3| = 5$ $\quad$ $\operatorname{Im} z > 0$ $\quad$ $\operatorname{Im} z \geq 0$

≤ 5

> 5 $\quad$ $\operatorname{Re} z > 0$ $\quad$ $\operatorname{Re} z \geq 0$

3) Δ.Ο $|z| \leq |z-w| + |w|$

$|z| - |w| \leq |z-w|$

$|z| - |w| \leq |z+w|$

4) Έστω $\alpha \neq 0$. Βρείτε $\left|\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right| = ?$